



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Excitación periódica

Excitación impulsiva

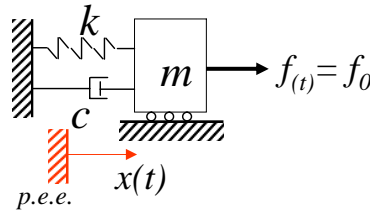
Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Fuerza constante (i)



Ecuación de movimiento: $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{f_0}{m}$

Solución propuesta: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Solución homogénea: (transitoria) $x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \text{Cos}(\omega_d t) + A_2 \text{Sen}(\omega_d t)]$

Solución particular: (permanente) $x_p(t) = \frac{f_0}{k}$

Solución total: $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \text{Cos}(\omega_d t) + A_2 \text{Sen}(\omega_d t)] + \frac{f_0}{k}$

Cond. iniciales $x(t=0) = x_0$ $\dot{x}(t=0) = v_0$ $A_1 = \left(x_0 - \frac{f_0}{k}\right)$ $A_2 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n \left(x_0 - \frac{f_0}{k}\right)}{\omega_d}$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Excitación periódica

Excitación impulsiva

Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

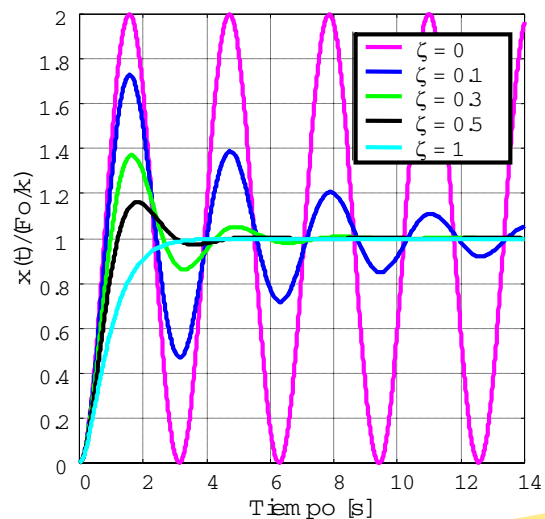
Resp. forzada: Fuerza constante (ii)

Si las condiciones iniciales son nulas i.e. $x_0 = v_0 = 0$

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\text{Cos}(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \text{Sen}(\omega_d t) \right) \right]$$

Si $\zeta = 0$

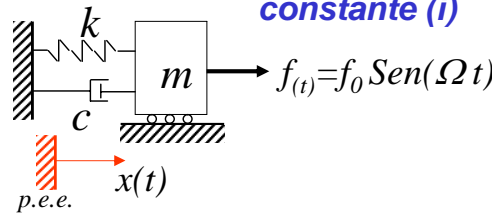
$$x(t) = \frac{f_0}{k} [1 - \text{Cos}(\omega_n t)]$$





- I. Introducción
- II. Sistema de 1-GDL
 - Descripción
 - Ec. de movimiento
 - Resp. libre
 - Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple**
 - Amplitud cte.**
 - Desbalance
 - Mov. de la base
 - Fuerza transmitida
 - Excitación periódica
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general
- III. Sistemas de N-GDL
- IV. Medición / diagnóstico
- V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación armónica simple de amplitud constante (i)



Ecuación de movimiento: $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{f_0}{m} \text{Sen}(\Omega t)$

Solución propuesta: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Solución homogénea: (transitoria) $x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \text{Cos}(\omega_d t) + A_2 \text{Sen}(\omega_d t)]$

Solución particular: (permanente) $x_p(t) = X \text{Sen}(\Omega t - \gamma)$

Amplitud $X = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ **Desfasaje** $\gamma = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$

Relación de frecuencias $r = \Omega/\omega_n$

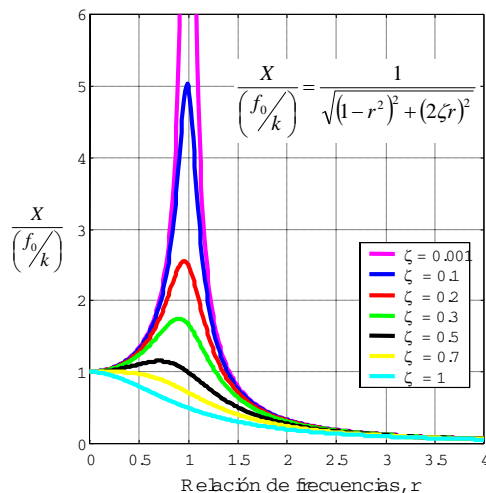


- I. Introducción
- II. Sistema de 1-GDL
 - Descripción
 - Ec. de movimiento
 - Resp. libre
 - Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple**
 - Amplitud cte.**
 - Desbalance
 - Mov. de la base
 - Fuerza transmitida
 - Excitación periódica
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general
- III. Sistemas de N-GDL
- IV. Medición / diagnóstico
- V. Bibliografía

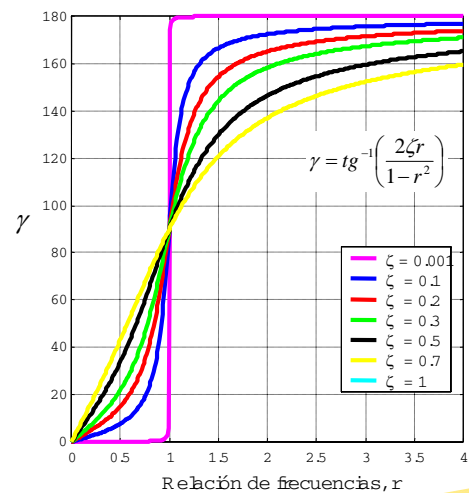
Resp. forzada: Excitación armónica simple de amplitud constante (ii)

$$x_p(t) = X \text{Sen}(\Omega t - \gamma) = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \text{Sen}\left(\Omega t - \frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

Factor de amplificación



Desfasaje





I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción
Ec. de movimiento
Resp. libre
Resp. forzada

Fuerza constante
Armónica simple
Amplitud cte.
Desbalance
Mov. de la base
Fuerza transmitida
Excitación periódica
Excitación impulsiva
Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Euro Casanova, 2006

Resp. forzada: Excitación armónica simple de amplitud constante (iii)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \text{Cos}(\omega_d t) + A_2 \text{Sen}(\omega_d t)] + X \text{Sen}(\Omega t - \gamma)$$

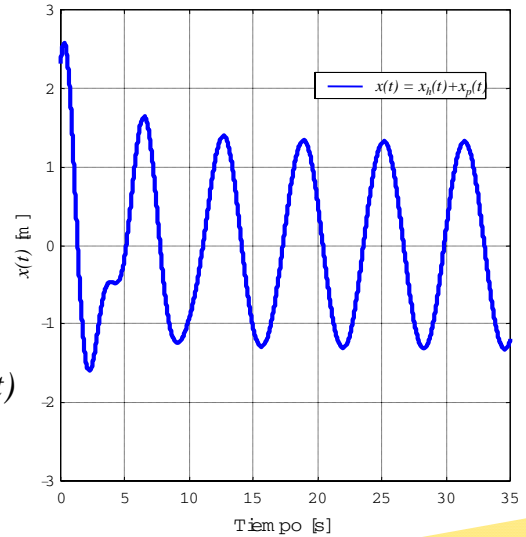
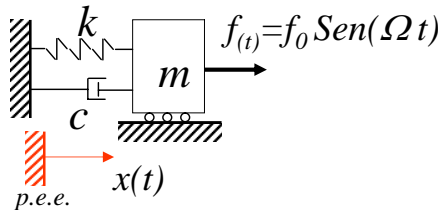
Dependen de las condiciones iniciales

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

$$A_1 = x_0$$

$$A_2 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0 - X\Omega}{\omega_d}$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción
Ec. de movimiento
Resp. libre
Resp. forzada

Fuerza constante
Armónica simple
Amplitud cte.
Desbalance
Mov. de la base
Fuerza transmitida
Excitación periódica
Excitación impulsiva
Excitación general

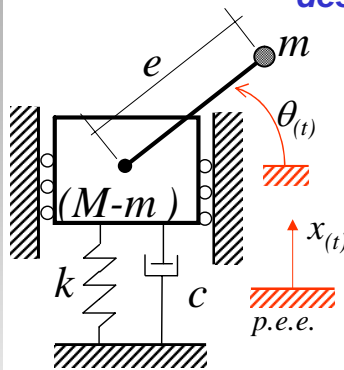
III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Euro Casanova, 2006

Resp. forzada: Excitación armónica simple debida al desbalance (i)



Sistema de 2 gdl: $x(t), \theta(t)$

Fuerza Generalizada $Q_x = Q_\theta = 0$ Función de Disipación $D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$

Energía Potencial $U = Mgx + mge \text{Sen}(\theta) + \frac{1}{2} k(x - \delta_s)^2$

Energía Cinética $T = T^{(M-m)} + T^m = \frac{1}{2} (M - m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m e^2 \dot{\theta}^2 + m e \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos}(\theta)$$

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$\rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m e \dot{\theta}^2 \text{Sen}(\theta) - m e \ddot{\theta} \text{Cos}(\theta)$$

Si la velocidad de giro es constante: $\dot{\theta} = \Omega = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 ; \theta = \Omega t$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{m}{M} e \Omega^2 \text{Sen}(\Omega t)$$



Resp. forzada: Excitación armónica simple debida al desbalance (ii)

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Amplitud cte.

Desbalance

Mov. de la base

Fuerza transmitida

Excitación periódica

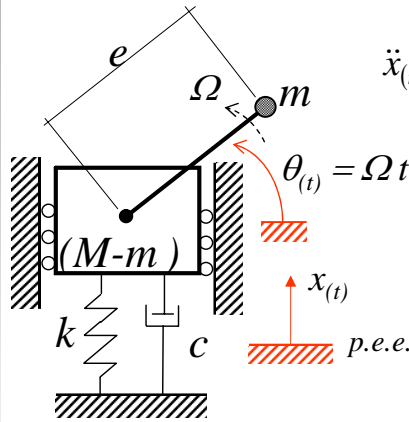
Excitación impulsiva

Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

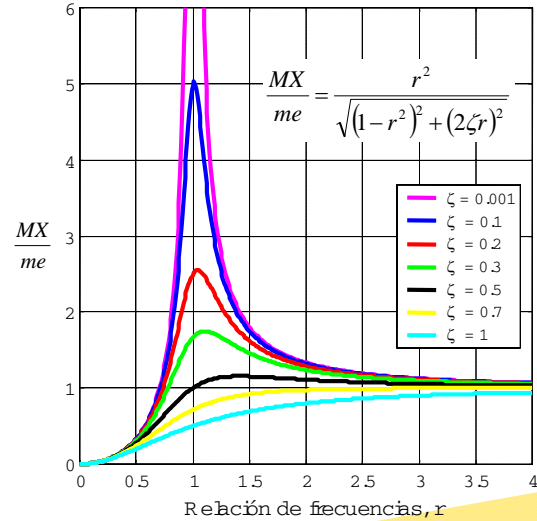
IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía



$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{m}{M}e\Omega^2\text{Sen}(\Omega t)$$

Factor de amplificación



$$x_p(t) = X \text{Sen}(\Omega t - \gamma)$$

$$X = \frac{me}{M} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$



Resp. forzada: Excitación armónica debida a movimiento de la base (i)

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Amplitud cte.

Desbalance

Mov. de la base

Fuerza transmitida

Excitación periódica

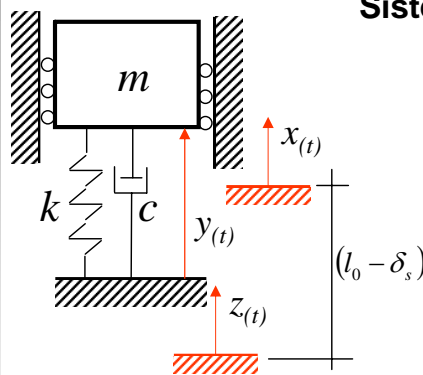
Excitación impulsiva

Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía



Sistema de 2 gdl: $x(t), z(t)$

Fuerza Generalizada $Q_x = Q_z = 0$ Función de Disipación $D = \frac{1}{2}c(\dot{x}^2 - \dot{z}^2)$

Energía Potencial $U = mg(x + l_0 - \delta_s) + \frac{1}{2}k(x - z - (l_0 - \delta_s))^2$

Energía Cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Definiendo: $y(t) = x(t) - z(t)$ ← Desplazamiento relativo

$$Q_y = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \Rightarrow m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = m\ddot{z}(t)$$

Si: $z(t) = z_0 \text{Sen}(\Omega t)$

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \frac{mZ_0\Omega^2}{m} \text{Sen}(\Omega t)$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Amplitud cte.

Desbalance

Mov. de la base

Fuerza transmitida

Excitación periódica

Excitación impulsiva

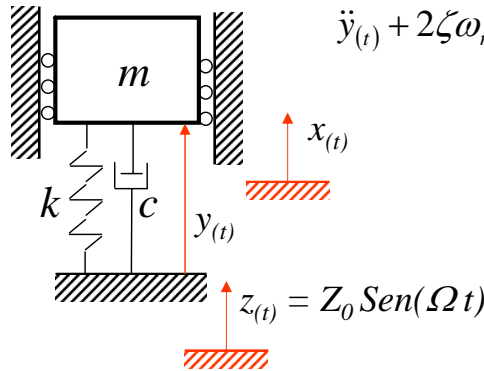
Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación armónica debida a movimiento de la base (ii)

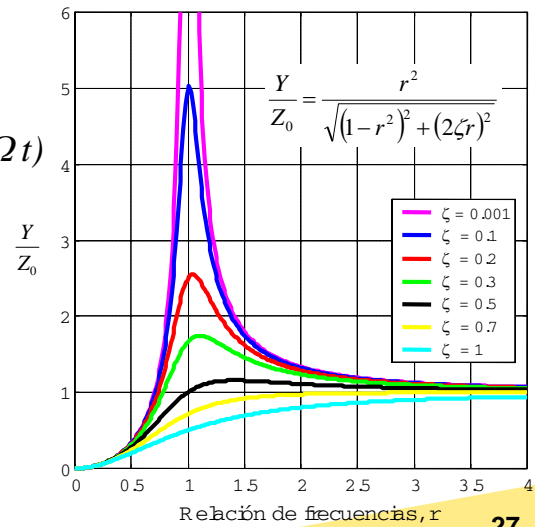


$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \frac{m Z_0 \Omega^2}{m} Sen(\Omega t)$$

$$y_p(t) = Y Sen(\Omega t - \gamma)$$

$$Y = Z_0 \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Factor de amplificación



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

Descripción

Ec. de movimiento

Resp. libre

Resp. forzada

Fuerza constante

Armónica simple

Amplitud cte.

Desbalance

Mov. de la base

Fuerza transmitida

Excitación periódica

Excitación impulsiva

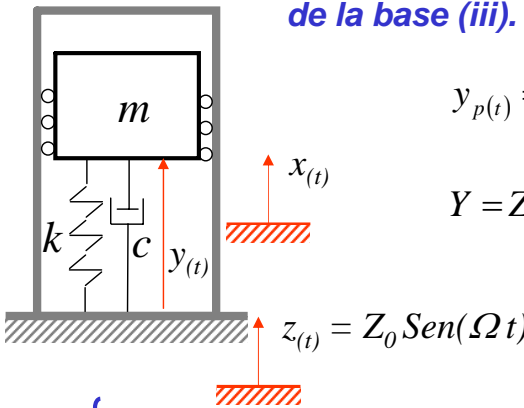
Excitación general

III. Sistemas de N-GDL

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Resp. forzada: Excitación armónica debida a movimiento de la base (iii). Acelerómetro



$$y_p(t) = Y Sen(\Omega t - \gamma)$$

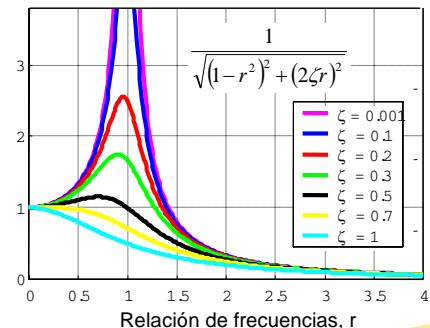
$$Y = Z_0 (r^2) \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right\}$$

$$\text{Si: } \begin{cases} \zeta \approx 0.7 \\ r < 0.7 \end{cases} \iff \omega_n \gg \Omega$$

$$Y \approx Z_0 (r^2) = Z_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \propto Z_0 \Omega^2$$

Amplitud medida

Aceleración de la base



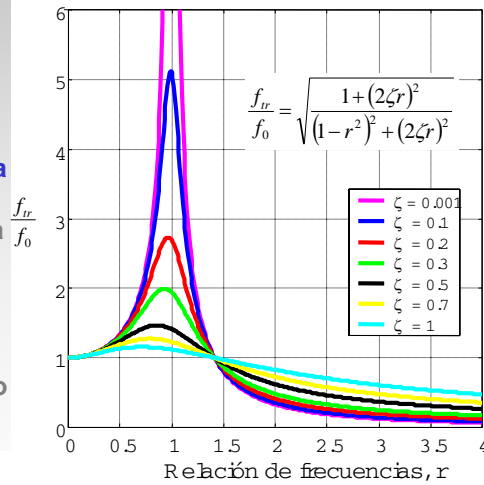


Resp. forzada: Excitación armónica simple - fuerza transmitida a la fundación

- I. Introducción
- II. Sistema de 1-GDL
 - Descripción
 - Ec. de movimiento
 - Resp. libre
 - Resp. forzada**
 - Fuerza constante
 - Armónica simple**
 - Amplitud cte.
 - Desbalance
 - Mov. de la base
 - Fuerza transmitida**
 - Excitación periódica
 - Excitación impulsiva
 - Excitación general
- III. Sistemas de N-GDL
- IV. Medición / diagnóstico
- V. Bibliografía

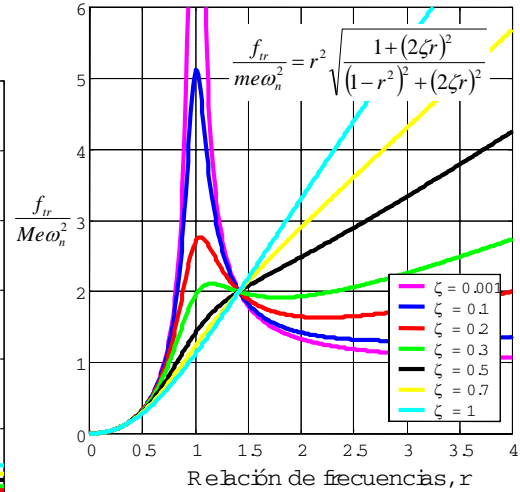
$$f_{tr} = c\dot{x}_{p(t)} + kx_{p(t)}$$

Transmisibilidad



$$f_{(t)} = f_0 \text{Sen}(\Omega t)$$

Transmisibilidad



$$f_{(t)} = m e \Omega^2 \text{Sen}(\Omega t)$$